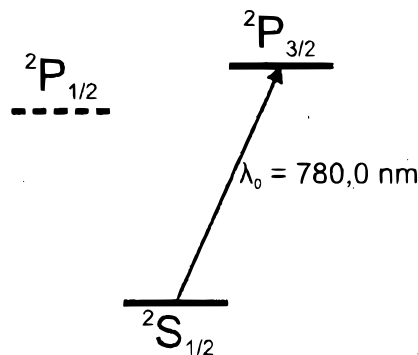


Themenschwerpunkt A
Atom- und Molekülphysik

Aufgabe 1: Laserkühlung von Rubidium-Atomen

Das Prinzip der Laserkühlung basiert auf dem Impulsübertrag bei der Absorption eines Photons aus einem gerichteten Laserstrahl und der anschließenden spontanen Reemission der Photonen.

Wir betrachten die Feinstruktur-niveaus $^2S_{1/2}$ und $^2P_{3/2}$ eines ^{87}Rb -Alkaliatoms (siehe Skizze). Das Niveau $^2P_{1/2}$ sowie die Hyperfeinwechselwirkung werden im Folgenden vernachlässigt. Die Resonanz des Übergangs $^2S_{1/2} \leftrightarrow ^2P_{3/2}$ liegt bei $\nu_0 = 384,2 \text{ THz}$ ($\lambda_0 = 780,0 \text{ nm}$), die natürliche Linienbreite des Übergangs beträgt $\Delta\nu = 6,07 \text{ MHz}$. Das Rubidium liege in der Gasphase vor.



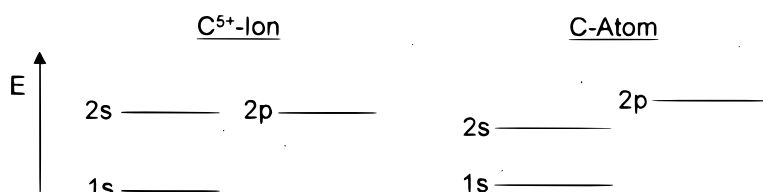
- a) Das Atom befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im angeregten Zustand $^2P_{3/2}$ und relaxiere ins $^2S_{1/2}$ Niveau durch spontane Photon-Emission. Geben Sie bis auf einen Proportionalitätsfaktor die Funktion an, die die Besetzungswahrscheinlichkeit des angeregten Zustands in Abhängigkeit der Zeit beschreibt. Schätzen Sie die mittlere Lebensdauer τ dieses Zustands unter Verwendung der natürlichen Linienbreite $\Delta\nu$ ab.
(Ersatzlösung: $\tau = 18,3 \text{ ns}$) (4 Punkte)
- b) Berechnen Sie den Impuls, der auf ein ^{87}Rb -Atom übertragen wird, wenn es ein Photon aus dem Laserstrahl auf Grund des $^2S_{1/2} - ^2P_{3/2}$ Übergangs absorbiert. Erläutern Sie qualitativ, warum bei einer Vielzahl von Absorptions- und Emissionszyklen der Impulsübertrag aufgrund der Emission vernachlässigt werden kann.
(Ersatzlösung: $\Delta p = 6,31 \cdot 10^{-28} \text{ kg m/s}$) (4 Punkte)
- c) Berechnen Sie die maximal mögliche mittlere Anzahl der Absorptions-Emissions-Zyklen pro Sekunde. Nehmen Sie dabei eine instantane Anregung des Atoms aus dem $^2S_{1/2}$ Niveau an. Berechnen Sie die gemittelte Nettokraft auf das Atom für diesen Fall.
(4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

- d) Bestimmen Sie zunächst die mittlere Geschwindigkeit der ^{87}Rb -Gasatome bei $T = 300\text{ K}$. Berechnen Sie die Zahl der Absorptionsprozesse, die im Idealfall mindestens benötigt werden, um ein einzelnes Atom mit $v = 280\text{ m/s}$ vollständig abzubremsen. Nehmen Sie vereinfachend an, dass die Absorption immer resonant stattfindet. Erläutern Sie qualitativ, warum man real keine vollständige Abbremsung erreichen würde. (5 Punkte)
- e) Zur Laserkühlung werden 6, jeweils in den 3 Raumrichtungen paarweise entgegengesetzt gerichtete Laserstrahlen verwendet. Begründen Sie, wie die Laserwellenlänge bei der reinen Laserkühlung gegenüber der resonanten Absorption eines ruhenden Atoms verstimmt werden muss, damit ein Kühleffekt erreicht wird. (3 Punkte)

Aufgabe 2: Kohlenstoff-Atom

Die Einzelelektronenkonfiguration für den Grundzustand des Kohlenstoff-Atoms (C-Atoms) ist $(1s)^2 (2s)^2 (2p)^2$.



- a) Die Skizze oben zeigt qualitativ (nicht maßstäblich!) die Energieschemata des C^{5+} -Ions und des C-Atoms bis zur Hauptquantenzahl $n=2$, wie sie sich in Zentralfeldnäherung ohne relativistische Korrekturen ergeben. Begründen Sie qualitativ, warum beim C-Atom im Vergleich mit dem C^{5+} -Ion die Entartung zwischen 2s und 2p aufgehoben ist und man deshalb nur die Elektronen in der 2p-Schale als Valenzelektronen behandeln muss. (3 Punkte)
- b) Übernehmen Sie die Skizze und zeichnen Sie für den Grundzustand die Besetzung der Niveaus, inklusive der Spinausrichtung, ein. (2 Punkte)
- c) Begründen Sie, warum man zur Bestimmung der Energierme der Valenzelektronen im C-Atom die L-S-Kopplung (Russel-Saunders-Kopplung) und nicht die j-j-Kopplung verwendet. Geben Sie den Kopplungsmechanismus für die Bestimmung der Energierme im He-Atom und im Hg-Atom an und begründen Sie jeweils kurz Ihre Wahl. (3 Punkte)
- d) In einem möglichen angeregten Zustand des C-Atoms befindet sich ein Valenzelektron in der 3s-Schale. Geben Sie die Einzelelektronenkonfiguration der Valenzelektronen für diesen Fall an. Zeigen Sie, dass sich in diesem Fall für die Valenzelektronen bei L-S-Kopplung die vier Energierme 1P_1 , 3P_2 , 3P_1 und 3P_0 ergeben. Erläutern Sie die Bedeutung des Buchstabens P und der beiden Zahlen links und rechts des Buchstabens bei den Energiermen. (7 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Themenschwerpunkt A
Atom- und Molekülphysik

Aufgabe 1: Cäsium-Atomuhr

Für hochgenaue Zeitmessungen mittels einer Atomuhr kann man den Hyperfeinstrukturübergang des elektronischen Grundzustands des ^{133}Cs -Atoms ausnutzen.

- a) Geben Sie die vollständige Termsymbolbezeichnung für den elektronischen Grundzustand von ^{133}Cs an. Benennen Sie für die verwendeten Zahlen und Buchstaben die zugehörigen physikalischen Größen. (2P)
- b) ^{133}Cs hat die Kernspin-Quantenzahl $I = 7/2$. Bestimmen Sie die Anzahl der Hyperfeinstrukturterme an, in die der elektronische Grundzustand aufspaltet. Bestimmen Sie für jeden Term die Quantenzahl F des Gesamtdrehimpulses und den Entartungsgrad. (4P)
- c) Die Energieverschiebung ΔE_{HFS} eines elektronischen Niveaus durch die Hyperfeinstrukturwechselwirkung beträgt für einen Term mit der Quantenzahl F : $\Delta E_{\text{HFS}} = (A/2)[F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)]$. Hierbei ist J die Drehimpulsquantenzahl des Elektrons und die Hyperfeinstrukturkonstante $A = 9,5045 \mu\text{eV}$. Bestimmen Sie die Frequenz ν der Strahlung, die dem Hyperfeinstrukturübergang des ^{133}Cs -Grundzustands entspricht, sowie die zugehörige Lichtwellenlänge λ . Benennen Sie den Spektralbereich. (3P)
- d) Erläutern Sie stichwortartig, warum zur Optimierung der Genauigkeit der Zeitmessung eine geringe Konzentration und eine möglichst tiefe Temperatur der Cs-Atome erforderlich sind. Erläutern Sie auch, welche fundamentale Begrenzung der Genauigkeit dann noch übrig bleibt. (3P)
- e) Die Kühlung der Cs-Atome kann mittels Absorption und Re-Emission von Photonen erfolgen (Laserkühlung), z.B. am elektronischen Übergang zwischen den Niveaus $6s$ und $6p_{3/2}$ (D_2 -Linie) mit der Energie $E_{D_2} = 1,454719 \text{ eV}$. Hierbei muss die Photonenenergie E_{ph} relativ zu E_{D_2} leicht verschoben sein. Deuten Sie diese Tatsache und geben Sie mit Begründung das Vorzeichen der Energieverschiebung δE_{ph} an. (2P)
- f) Berechnen Sie die optimale Photon-Energieverschiebung δE_{ph} zur Absorption durch ein Cs-Atom mit der mittleren atomaren kinetischen Energie bei 300 K, welches sich entgegengesetzt zum Laserstrahl bewegt. (3P)
(Ersatzlösung: $-1,2 \mu\text{eV}$)
- g) Bestimmen Sie den Impulsübertrag bei dieser Absorption und berechnen Sie hiermit die mindestens erforderliche Anzahl dieser Absorptionsprozesse zur möglichst vollständigen Abbremsung dieses Cs-Atoms. (2P)
- h) Tatsächlich nimmt bei dieser Prozessführung die Effizienz der Kühlung mit fallender Temperatur des Gases kontinuierlich ab. Deuten Sie diese Tatsache. (1P)

Themenschwerpunkt A:
Atom- und Molekülphysik

Aufgabe 1: Spektroskopie von Joddampf**(20 Punkte)**

Elementares Jod (I_2) ist unter Normalbedingungen ein Feststoff, der leicht sublimiert. Das einzige stabile Isotop ist $^{127}_{53}I$ mit dem Kernspin $5/2$ und der Masse $126,9$ u pro Atom. In einem evakuierten Glaskolben steht festes Jod im Gleichgewicht mit Joddampf, dessen Druck bei Zimmertemperatur etwa $0,5$ mbar beträgt. Wir betrachten das optische Absorptionsspektrum dieses Joddampfes. Es enthält im roten, gelben und grünen Spektralbereich Tausende schmale Linien, die alle zu einem elektronischen Übergang und Übergängen zwischen unterschiedlichen Schwingungs- und Rotationszuständen gehören.

- a) Im elektronischen Grundzustand beträgt die Schwingungsfrequenz des Jod-Moleküls $\nu = 6,43 \cdot 10^{12}$ Hz. Berechnen Sie daraus die Federkonstante der chemischen Bindung. Berechnen Sie außerdem, bis zu welcher Quantenzahl n die Schwingungsniveaus bei $T = 300$ K mindestens 10% der thermischen Besetzung des Schwingungsgrundzustands aufweisen. Vernachlässigen Sie Anharmonizitäten des Oszillator-Potentials. (4 Punkte)
- b) Abgesehen von der thermischen Besetzung bestimmt der Franck-Condon-Faktor die Intensität der Übergangslinien zu den unterschiedlichen Schwingungszuständen des elektronisch angeregten Zustands. Erklären Sie die physikalische Ursache dieses Faktors. Begründen Sie unter Zuhilfenahme eines $E(R)$ -Diagrammes (E : Energie; R : Abstand der Atomkerne), dass dieser Faktor sehr kleine Werte annehmen kann. (3 Punkte)
- c) Die Rotationskonstante des Jodmoleküls beträgt $B = \hbar^2/(2\Theta) = 4,632$ μ eV, wobei Θ das Trägheitsmoment ist. Berechnen Sie daraus den Abstand der beiden Atome. (2 Punkte)
- d) Wir betrachten im Folgenden eine Absorptionslinie von Joddampf bei $\lambda = 578$ nm. Aufgrund der thermischen Bewegung der Jod-Moleküle und des resultierenden Doppler-Effekts ist die Linie verbreitert. Begründen Sie, welche spektrale Form die doppler-verbreiterte Linie hat. Berechnen Sie die Doppler-Breite in Frequenzeinheiten bei der Temperatur $T = 300$ K. Nehmen Sie an, dass der Linie nur ein einziger Übergang zu Grunde liegt. (4 Punkte)
- e) In Wirklichkeit sind die Jod-Linien deutlich breiter als die berechnete Doppler-Breite und meist auch leicht asymmetrisch. Der Grund ist die Hyperfein-Wechselwirkung der Elektronen mit den Kernspins, durch die jede Linie in 15 bzw. 21 Hyperfein-Komponenten aufgespalten ist, deren spektraler Abstand kleiner als die Doppler-Breite ist. Die Zahl der Hyperfein-Linien (15 oder 21) hängt davon ab, ob die Rotationsquantenzahl J des Ausgangszustandes gerade oder ungerade ist (begründet in der Symmetrie der Wellenfunktionen). Die Kernspins der beiden Jodatome ($I_1 = I_2 = 5/2$) ergeben den Gesamt-Kernspin \bar{I} . Geben Sie die möglichen Werte für seine Quantenzahl I an, die aus den Regeln für die quantenmechanische Drehimpuls-Kopplung resultieren. Zeigen Sie, dass die Summe der magnetischen Komponenten I_z aller geraden bzw. aller ungeraden I -Werte die Anzahl der Hyperfein-Komponenten (15 bzw. 21) ergibt. (4 Punkte)

- f) Mittels dopplerfreier Spektroskopie von Joddampf bei $\lambda = 578$ nm können isolierte Hyperfeinkomponenten erhalten werden, die zur Frequenzstabilisierung von Lasern verwendet werden. Dadurch erreicht man eine absolute Stabilität und Reproduzierbarkeit der Laserlinie von etwa $\Delta\nu = 1$ MHz. Berechnen Sie, welcher spektralen Auflösung $\lambda/\Delta\lambda$ das entspricht. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|\lambda/\Delta\lambda| = |\nu/\Delta\nu|$ ist.) (3 Punkte)

Aufgabe 2: Röntgenstrahlen**(20 Punkte)**

- a) Skizzieren Sie das Emissionsspektrum einer typischen Röntgenröhre als Funktion der Wellenlänge und zeichnen Sie auch die K_α -, K_β -, L_α - und L_β -Linien ein. Begründen Sie dabei mit Hilfe von Rechnungen die relative Lage der oben genannten Linien im Diagramm (vernachlässigen Sie eventuell unterschiedliche Abschirmungseffekte). (4 Punkte)
- b) Erläutern und benennen Sie die Ursache dafür, dass die charakteristischen Linien bei genügend hoher spektraler Auflösung weiter aufspalten. Begründen Sie mithilfe einer vollständig beschrifteten Skizze und Nennung der Auswahlregeln, in wie viele Linien die K_α - und L_α -Linien prinzipiell aufspalten können (vernachlässigen Sie dabei Kerneffekte). (5 Punkte)
- c) Begründen Sie, ob bei genügend hoher spektraler Auflösung sämtliche möglichen Linien getrennt beobachtet werden können oder nicht. (3 Punkte)
- d) Geben Sie mithilfe einer Rechnung an, aus welchem Anodenmaterial eine Röntgenröhre besteht, deren K_α -Strahlung eine Energie von 8 keV aufweist. (2 Punkte)
- e) Begründen Sie anhand der Quantenzahlen, wie viele Elektronen in einem neutralen Atom insgesamt in der K-Schale Platz finden, wie viele insgesamt in der L-Schale. (2 Punkte)

Nehmen Sie im Folgenden an, dass in einem Atom der Anode ein Elektron der L-Schale durch ein Myon ausgetauscht wird, wobei alle anderen Elektronen im Atom unberührt bleiben.

- f) Begründen Sie qualitativ, welchen niederenergetischsten Zustand das Myon nach der Aufnahme in die Elektronenhülle einnehmen wird. (2 Punkte)
- g) Begründen Sie qualitativ, ob sich bei gleicher Hauptquantenzahl der bohrsche Radius der Bahn des Myons im Vergleich zu dem einer Elektronbahn in seiner Größe unterscheidet oder nicht. (2 Punkte)