

Themenschwerpunkt A
Atom- und Molekülphysik

Aufgabe 1: Spin-Bahn- und Hyperfein-Wechselwirkung in Wasserstoff

Die Spin-Bahn-Aufspaltung der elektronischen Energieniveaus im Wasserstoffatom soll in den folgenden Teilaufgaben in einem semiklassischen Modell abgeschätzt werden. Nehmen Sie hierzu an, dass das Elektron (Masse m_0) den Kern wie ein klassisches geladenes Teilchen im Abstand a umkreist.

- a) Nach dem Biot-Savart-Gesetz erzeugt eine am Ort \mathbf{r} mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegte Ladung Q am Koordinatenursprung eine magnetische Induktion

$$\mathbf{B} = -\frac{Q\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{v} \times \mathbf{r}.$$

Begründen Sie, weshalb sich im Ruhesystem des Elektrons durch dessen Bahnbewegung eine magnetische Induktion ergibt und zeigen Sie, dass deren Wechselwirkung mit dem Spinmoment des Elektrons zur Energieverschiebung

$$\Delta E_{LS} = \frac{e^2 \mu_0}{4\pi m_0^2 a^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

führt! \mathbf{L} und \mathbf{S} bezeichnen den Bahndrehimpuls bzw. den Spin des Elektrons. (3 Punkte)

- b) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass gilt $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$, wobei s , l und j die Spin-, Bahndrehimpuls- und Gesamtdrehimpulsquantenzahlen des Elektrons sind! (2 Punkte)
- c) Berechnen Sie den energetischen Abstand zwischen den beiden Spin-Bahn-aufgespalteten 2p-Zuständen in eV, indem Sie a durch den zugehörigen klassischen Bahnradius nähern! (3 Punkte)

Unter Berücksichtigung der Hyperfeinwechselwirkung wird als weitere Korrektur

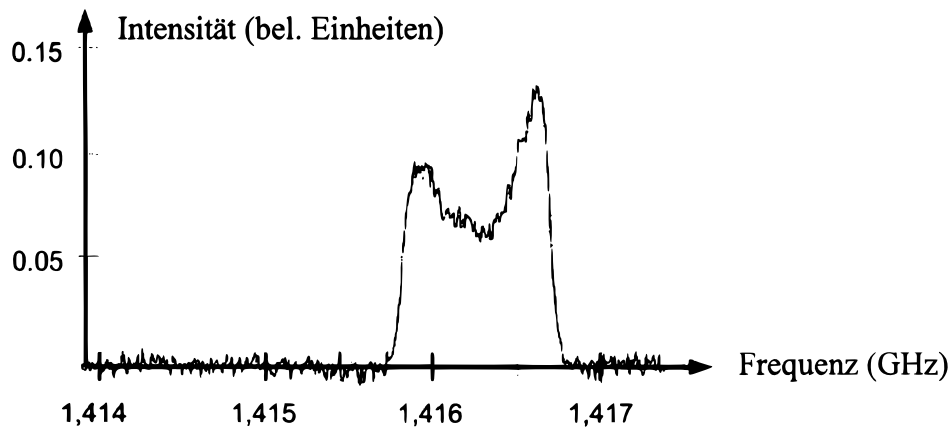
$$\Delta E_{HFS} = \frac{A}{2} [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)]$$

eingeführt, wobei A die Hyperfeinkonstante, I die Kernspinquantenzahl und F die Gesamtdrehimpulsquantenzahl des gesamten Atoms darstellen.

- d) Geben Sie eine physikalische Begründung für den Ursprung der Hyperfeinwechselwirkung! (2 Punkte)
- e) Skizzieren Sie das Hyperfein-Termschema für den Grundzustand des Wasserstoffatoms bestehend aus Proton und Elektron! Bestimmen Sie die Größe der Hyperfeinaufspaltung als Funktion von A und berechnen Sie hieraus A in eV, wenn die spektrale Aufspaltung 1,420 GHz beträgt! (4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

- f) Von einer fernen Galaxie wird Strahlung emittiert, die dieser Hyperfeinaufspaltung zugeordnet wird (siehe Abbildung). Begründen Sie, weshalb die Linie gegenüber der in e) genannten Frequenz verschoben ist, und bestimmen Sie aus der Verschiebung der Zentralfrequenz die Entfernung der Galaxie in Mparsec! Begründen Sie, weshalb im Spektrum zwei Maxima auftreten! (4 Punkte)



Hinweis: Die Proportionalitätskonstante zwischen der Entfernung x einer Galaxie und deren Fluchtgeschwindigkeit v ist durch die Hubblekonstante $H = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mparsec}^{-1}$ gegeben.

- g) Begründen Sie, weshalb die Zustände des Wasserstoffatoms in einem starken Magnetfeld ($B > 10 \text{ T}$) in guter Näherung nach den Richtungsquantenzahlen m_l des Kernspins, m_s des Elektronenspins und m_j des Bahndrehimpulses des Elektrons klassifiziert werden können! (2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2: Erzeugung von Röntgenstrahlung und Röntgenstreuung an Atomen (20 Punkte)

- a) Eine Röntgenröhre mit Molybdänanode werde mit einer Beschleunigungsspannung von 40 kV betrieben. Berechnen Sie die kürzeste Wellenlänge im Spektrum dieser Röhre sowie die Photonenergien der ersten drei K-Linien unter Verwendung des Moseleyschen Gesetzes! Geben Sie die Energien in Einheiten von keV an!

(3 Punkte)

- b) Das Moseleysche Gesetz beschreibt die spektrale Position der K-Linienserie. In einer verallgemeinerten Form kann man die Frequenzen f beliebiger weiterer Linien beschreiben, die beim Elektronenübergang zwischen den Hauptquantenzahlen n_1 und n_2 entstehen:

$$f = cR(Z - S)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

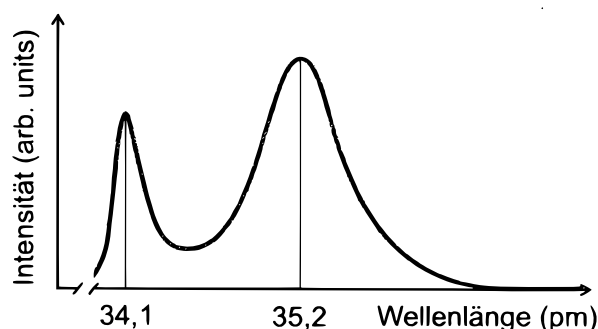
c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit, R die Rydbergkonstante und Z die Kernladungszahl. Erläutern Sie, welche physikalische Bedeutung die Größe S hat! Begründen Sie qualitativ, weshalb für eine präzise Beschreibung charakteristischer Röntgenstrahlung S selbst von den Quantenzahlen n_1 und n_2 abhängen sollte!

(2 Punkte)

- c) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man aus einem kontinuierlichen Spektrum monochromatische Röntgenstrahlung einer bestimmten Wellenlänge auswählen kann, und beschreiben Sie das Prinzip!

(3 Punkte)

Monochromatische Röntgenstrahlung einer Wellenlänge von $\lambda = 34,1$ pm werde nun an einer polykristallinen Graphitprobe gestreut. Beugungseffekte sollen dabei keine Rolle spielen. Unter dem Winkel θ gegenüber der Einfallrichtung wird folgendes Röntgenspektrum gemessen:



- d) Benennen und erläutern Sie die physikalischen Effekte, die zur Entstehung der beiden Intensitätsmaxima führen! Geben Sie quantitativ an, wie sich die Wellenlängendifferenz zwischen den beiden Maxima verändert, wenn die Wellenlänge λ der einfallenden Röntgenstrahlung abnimmt! Beschreiben Sie qualitativ, wie sich bei Abnahme von λ das Intensitätsverhältnis der beiden Maxima im obigen Bild verändert, und begründen Sie Ihre Antwort!

(5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

e) Berechnen Sie den Winkel θ , unter dem die Röntgenphotonen aus obiger Abbildung gestreut wurden!

(2 Punkte)

f) Berechnen Sie die kinetische Energie in keV, den Betrag des Impulses und den Streuwinkel des Rückstoßelektrons für inelastische Röntgenstreuung nach obiger Abbildung, falls das Elektron als frei und vor dem Stoß in Ruhe betrachtet wird!

(5 Punkte)

- 6 -